المستوى:الثالثة علوم تجريبية	**مارس 2022**
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	**المدة : ساعتين.**

التمرين 1

لتكن الدالة f المعرفة على$]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

(الشكل في الوثيقة المرفقة)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

1) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء) .

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n<2$

4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

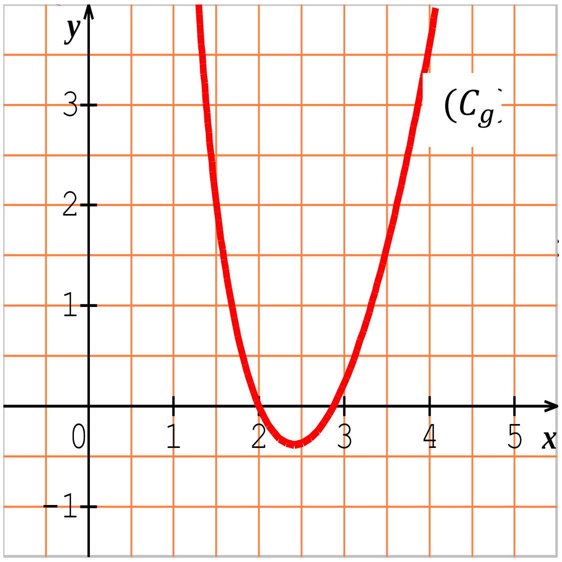
II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=1-\frac{2}{u_n}$

ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{u_0-2}+\frac{u_1}{u_1-2}+\cdots+\frac{u_n}{u_n-2}$

التمرين 2



I) لتكن الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين ي الشكل المقابل

1) بقراءة بيانية : عين حلول المعادلة $g(x) = 0$

2) احسب $g(2)$ ، ثم بين ان المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $2.87 < \alpha < 2.88$

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على$]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 3 + \frac{4\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف ، فسر النتائج هندسيا.

2) ا) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) ا) بين انه من اجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

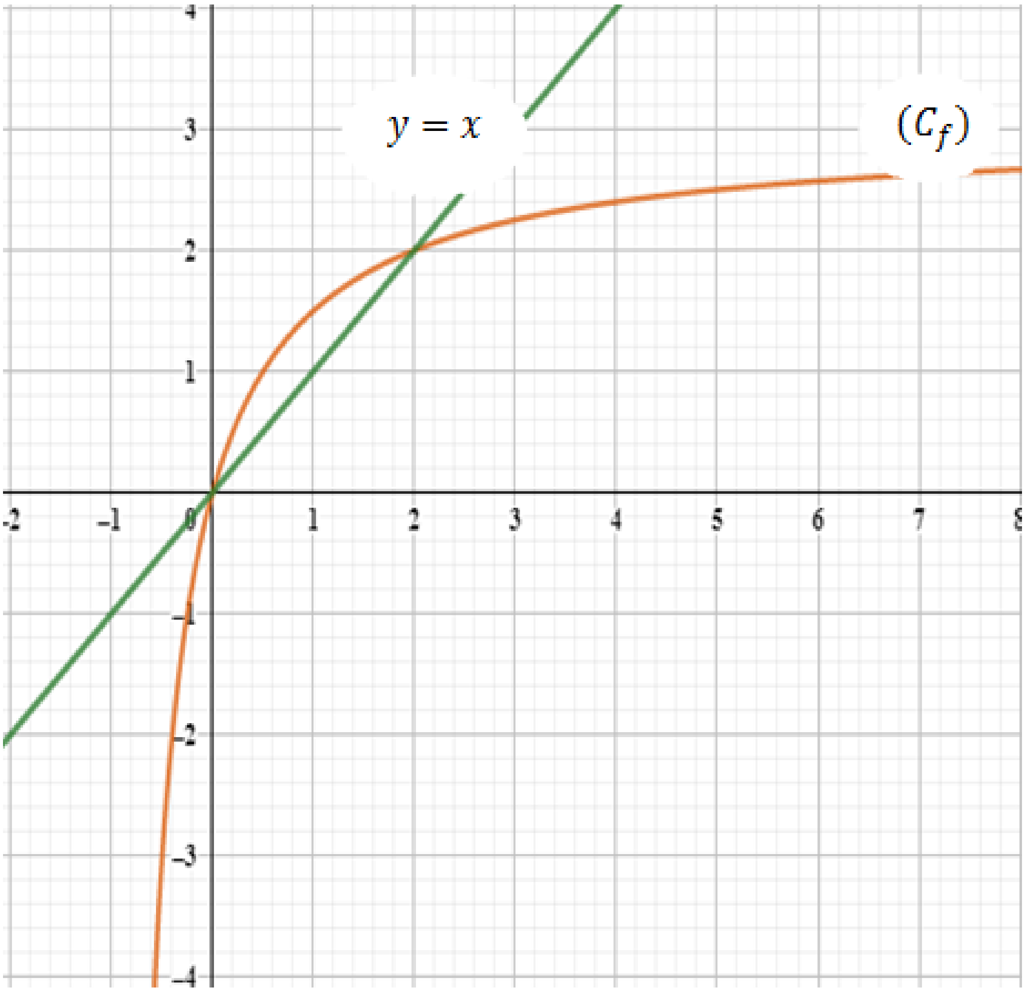
4) ارسم (T) و (C_f).(نأخذ $f(\alpha)$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على$]1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$$

- بين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

بالتوفيق.

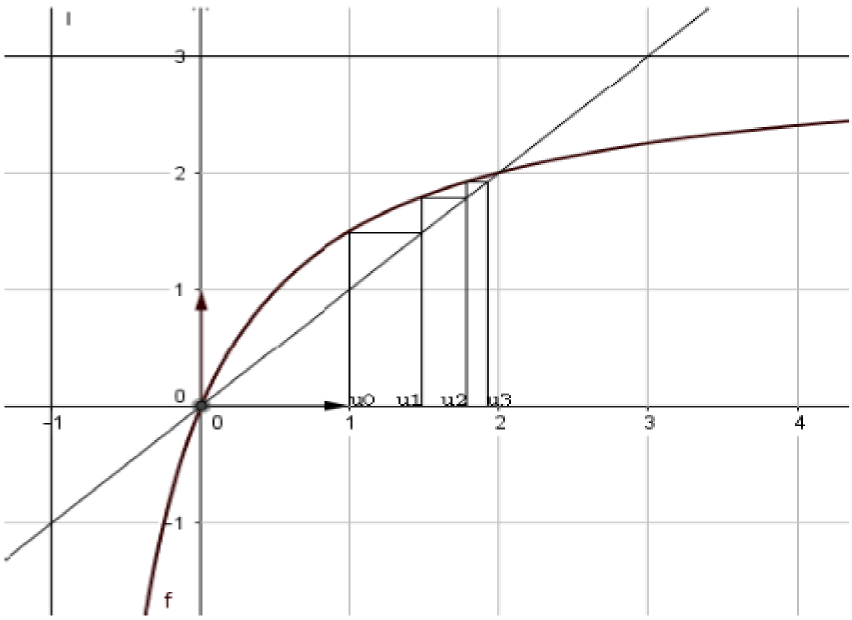


- الوثيقة المرفقة-

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين 1	see below	

1) تمثيل على محور الفواصل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 u_0 ،



2) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2 .

3) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n < 2$

1) من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 1$ و $1 < 2$ و منه : $u_0 < 2$ أي (p_n) صحيحة من أجل $n = 0$.

2) نفرض صحة (p_n) و نبرهن على صحة (p_{n+1}) أي نفرض أن $u_n < 2$ و نبرهن أن $u_{n+1} < 2$

لدينا : $u_n < 2$ و منه $u_n + 1 < 3$ أي $\frac{1}{u_n+1} > \frac{1}{3}$ أي $\frac{-3}{u_n+1} < -1$

و منه : $3 - \frac{-3}{u_n+1} < 3 - 1$ وبالتالي : $u_{n+1} < 2$, إذن : (p_{n+1}) صحيحة .

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 2$

4) اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة ، و نهايتها.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n(u_n-2)}{u_n+1}$$

لدينا من البرهان بالتراجع : $u_n \prec 2$ أي : $u_n-2\prec 0$ و $u_n \succ 0$ أي : $-u_n \prec 0$

و منه $u_{n+1}-u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

- بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 و متزايدة فإنها متقاربة.

لدينا : $\frac{3\ell}{\ell+1}=\ell$ و منه : $\ell^2+\ell=3\ell$ أي : $\ell^2-2\ell=0$

$\ell=0$ (مرفوض) أو $\ell=2$

و منه $l=2$

ا) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

لدينا : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ و منه : $v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}}=1-\frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}}=1-\frac{2u_n+2}{3u_n}=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3u_n}$

و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3u_n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{u_n}\right)=\frac{1}{3}\times v_n$

$q=\frac{1}{3}$; $v_0=1$

ب) عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و

$$u_n=\frac{2}{1-v_n}=\frac{2}{1+(\frac{1}{3})^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=2$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{u_0-2}+\frac{u_1}{u_1-2}+\cdots+\frac{u_n}{u_n-2}$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(3)^n$$

التمرين 2

(I

1) بقراءة بيانية للمنحنى نجد المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين متمايزين

2) لدينا: $g(2)=0$

$g(2)=0$:

* بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.87;2.88]$ و >

$g(2.87).g(2.88)$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.87;2.88[$

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

(II

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـــ: (C_f)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2-أ) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب

مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ و الملخصة في الجدول التالي

x	1		$1+e^{-\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$f(x)-y$	|	$-$	0	$+$	
الوضعية	|	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3-أ) مهما كان $x \in]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

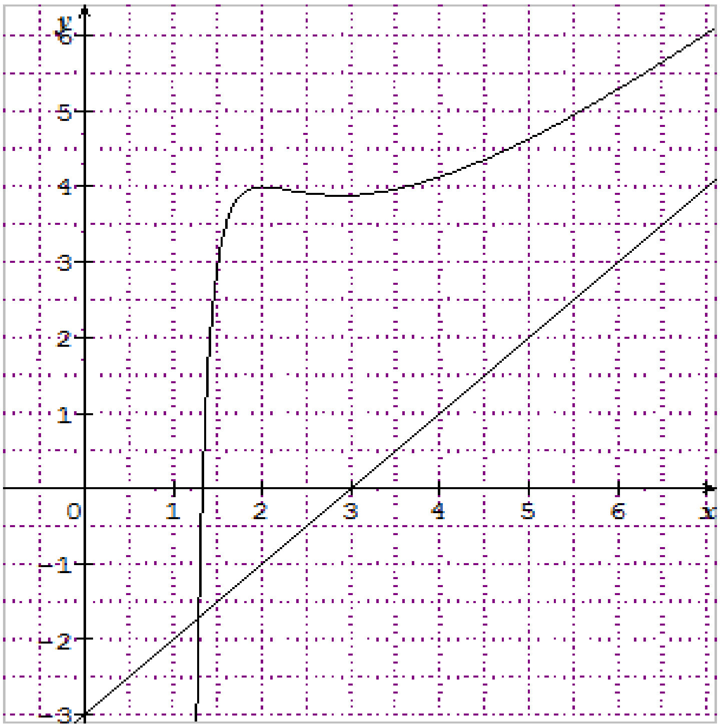
ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي أن: fمتزيدة تماما على كل من المجالين $]1;2]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$

جدول التغيرات

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) رسم (T) و (C_f).



(5

نبين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

$h'(x) = f(x)$